

Glückspilze oder wahre Helden? Stochastik der Würfelproben im Fantasy-Rollenspiel „Das Schwarze Auge“

JOSCHA PROCHNO, PASSAU, UND MICHAEL SCHMITZ, FLENSBURG

Zusammenfassung: „Das Schwarze Auge“ ist ein Pen-und-Paper-Fantasy-Rollenspiel, bei dem eine Heldengruppe gemeinsam Abenteuer durchlebt. Dabei entscheiden häufig mit Ikosaedern durchgeführte Würfelproben über Wohl und Wehe. Christiansen (2013) befasst sich auf einer Fan-Webseite unter der Überschrift „Der stochastische Albtraum“ mit der Bestimmung von Erfolgswahrscheinlichkeiten dieser Proben. Wir wollen hier aufzeigen, dass das verwendete Regelsystem keine Albträume hervorrufen muss, sondern einen schönen Anlass für die Beschäftigung mit elementarer Stochastik bietet. Das Niveau ist unseres Erachtens sowohl für Schülerinnen und Schüler als auch für Lehramtsstudierende zu Beginn ihres Studiums geeignet, und das Thema ist für Lernende, die sich für Spiele dieser Art interessieren, sicherlich besonders motivierend. Wir betrachten zunächst ein vereinfachtes System mit zwei anstelle von drei Würfeln, das eigentliche Problem lösen wir durch Rückbezug auf diese Vereinfachung. Hierbei kommen neben stochastischen Techniken auch geometrische Veranschaulichungen im zwei- und dreidimensionalen Koordinatensystem zum Einsatz. Bei der Betrachtung eines Optimierungsproblems ergibt sich ein schöner Bezug zur reellen Analysis.

1 Einleitung

Im Pen-und-Paper-Rollenspiel „Das Schwarze Auge“, das in der mittelalterlichen Fantasy-Welt „Aventurien“ spielt, übernimmt jede Spielerin¹ die Rolle einer Heldin. Es gibt ganz unterschiedliche Heldentypen, wie z.B. Kriegerinnen, Magierinnen, elfische Waldläuferinnen usw. Im Spiel müssen die Heldinnen sich in abenteuerlichen Situationen beweisen. So kann es sein, dass ein reißender Fluss durchschwommen oder eine gefährliche Steilwand erklettert werden muss. Ob einer Heldin ein solches Manöver gelingt, hängt vom Würfelglück und von ihren Fähigkeiten ab. Alle Heldinnen besitzen in den sogenannten *Eigenschaften* (Mut, Klugheit, Intuition, Charisma, Fingerfertigkeit, Gewandtheit, Konstitution, Körperkraft) Zahlenwerte aus $\{1, 2, \dots, 20\}$. Sprechweisen wie „Meine Heldin hat Mut 13“ sind üblich. Ein höherer Wert bedeutet dabei, dass eine Heldin besser in der betreffenden Eigenschaft ist. Darüber hinaus gibt es Zahlenwerte aus $\{0, 1, \dots, 18\}$ für Fer-

tigkeiten (wie z.B. Klettern, Schwimmen, Reiten, Tanzen, ...), die in unterschiedlichen Situationen zum Einsatz kommen. Auch hier sind hohe Werte besser als niedrige. Bei der Anwendung einer Fertigkeit wird eine sogenannte *Fertigkeitsprobe* gewürfelt. Hierbei kommt es nicht nur auf den Fertigkeitswert an, sondern auch darauf, welche der oben genannten Eigenschaften bei der Anwendung der jeweiligen Fertigkeit eine Rolle spielen. Jede Fertigkeitsprobe beruht auf den Werten von genau drei Eigenschaften und dem Fertigkeitswert.

Beispiel Beim Klettern gehen die Eigenschaften Mut, Gewandtheit und Körperkraft ein, wohingegen es z.B. beim Tanzen auf Klugheit, Charisma und Gewandtheit ankommt. Jana spielt die elfische Waldläuferin Lorindel, die einen Steilhang erklettern möchte. Lorindel besitzt folgende, für die erforderliche Probe relevanten Eigenschaftswerte: Mut 10, Gewandtheit 14, Körperkraft 9. Ihr Fertigkeitswert im Klettern beträgt 5. Die Fertigkeitsprobe besteht aus drei Würfeln mit einem Ikosaeder (20-Flächner, auch W20 genannt). Dabei bezieht sich der erste Wurf auf Mut (der erste Wurf „geht auf Mut“), der zweite auf Gewandtheit und der dritte auf Körperkraft. Man sagt, dass ein „Wert eingehalten“ wurde, wenn die gewürfelte Augenzahl kleiner oder gleich dem Eigenschaftswert ist. Jana hält beispielsweise einen Wurf auf Lorindels Mut bei einer Augenzahl von 1 bis 10 ein. Werden alle drei Eigenschaftswerte eingehalten, so ist die Probe auf jeden Fall gelungen.

Da Lorindel im Klettern einen Fertigkeitswert von 5 besitzt, kann Jana die Probe aber auch bestehen, wenn sie nicht alle Würfe einhält. Sie darf bei ihren drei Würfeln ihre Eigenschaften um insgesamt 5 übertreffen (sie darf „5 Punkte verbrauchen“). Würfelt sie zum Beispiel eine 12, eine 15 und eine 7, so hat sie die Probe bestanden, denn sie hat beim ersten Wurf zwei Punkte verbraucht („Sie hat eine 12 auf Mut 10 gewürfelt“), beim zweiten Wurf einen Punkt verbraucht („Sie hat eine 15 auf Gewandtheit 14 gewürfelt“) und beim letzten Wurf keinen Punkt verbraucht („Sie hat eine 7 auf Körperkraft 9 gewürfelt, also eingehalten.“). Insgesamt hat sie also drei Punkte verbraucht; sie hätte fünf Punkte verbrauchen dürfen.

Kurz zusammengefasst können wir Janas Fertigkeitsprobe für ihre Heldin Lorindel folgendermaßen ausdrücken: Lorindel hat im Klettern 5 Punkte auf (10, 14, 9). Jana hat (12, 15, 7) gewürfelt, also 3 Punkte verbraucht; die Probe ist erfolgreich. Man beachte, dass es nicht möglich ist, durch besonders gute Würfe auf einen oder zwei Werte schlechte Würfe auf andere Werte auszugleichen. Wenn Jana z.B. (2, 3, 16) würfelt, so ist die Probe misslungen, denn der letzte Wurf (16) geht auf Körperkraft (9). Sie hat hierbei also 7 Punkte verbraucht. Da hilft es nichts, dass sie in den ersten beiden Würfeln deutlich niedriger gewürfelt hat als nötig; diese Würfe gelten lediglich als eingehalten.

Man beachte außerdem, dass es bei besonders guten Werten sein kann, dass auch das schlechtestmögliche Würfelerggebnis 20 bei einem einzelnen Wurf noch nicht zum Misslingen einer Probe führt. Hat eine Heldin z.B. 8 Fertigkeitspunkte, und die Probe geht auf (13, 15, 14), so kann die Probe im ersten Wurf noch nicht scheitern. Bei einer 20 würden lediglich 7 Punkte verbraucht, und es bliebe noch 1 Punkt für die letzten beiden Würfe übrig.

Für Näheres zu den Regeln der aktuellen 5. Edition des Schwarzen Auges konsultiere man Spohr und Ullrich (2018). Wer dort nachliest, wird feststellen, dass es zwei Regelfeinheiten gibt, die wir bisher nicht erwähnt haben. Die Rede ist vom sogenannten „Patzer“ und vom „glücklichen Erfolg“. Ersteres ist eine Probe, bei der mindestens zwei der drei Würfe eine 20 zeigen. Eine solche gilt unabhängig davon, wie viele Fertigkeitspunkte verbraucht wurden, stets als misslungen; der Heldin unterläuft bei der versuchten Aktion sogar ein besonderes Missgeschick. Eine Probe, bei der mindestens zwei von drei Würfeln eine 1 zeigen, ist unabhängig von der Anzahl der verbrauchten Fertigkeitspunkte als glücklicher Erfolg stets gelungen (sogar außerordentlich gut).

Von den $20^3 = 8000$ möglichen Würfelerggebnissen sind je 20 von der Form $(x, 1, 1)$, $(1, y, 1)$ oder $(1, 1, z)$. Da wir den Wurf $(1, 1, 1)$ bei jeder dieser Varianten mitgezählt haben, gibt es insgesamt $3 \cdot 20 - 2 = 58$ Möglichkeiten, einen glücklichen Erfolg zu erzielen. Da zudem die meisten dieser Würfe sowie so zu einer erfolgreichen Probe führen würden, spielen glückliche Erfolge (und auch Patzer) bei der Berechnung von Erfolgswahrscheinlichkeiten eine untergeordnete Rolle, und wir wollen sie daher zur Vereinfachung zunächst außen vor lassen.

Unter Vernachlässigung von Patzern und glücklichen Erfolgen wenden wir uns nun der zentralen Frage zu:

Wie berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen einer Fertigkeitsprobe, wenn eine Heldin in der betreffenden Fertigkeit $k \in \mathbb{N}_0$ Punkte auf $(a, b, c) \in \{1, 2, \dots, 20\}^3$ besitzt?

Um einen besseren Zugang zu bekommen, betrachten wir zunächst eine vereinfachte Variante, in der die Fertigkeitsprobe durch zweimaliges Würfeln auf zwei Eigenschaftswerte durchgeführt wird, d.h. $k \in \mathbb{N}_0$ und $(a, b) \in \{1, 2, \dots, 20\}^2$. Wir nennen dies den „zweidimensionalen Fall“ und betrachten später im „dreidimensionalen Fall“ Proben nach der tatsächlichen Regel, also dreimaliges Würfeln auf drei Eigenschaftswerte.

2 Der zweidimensionale Fall

Wir wollen hier zunächst eine Formel für die Erfolgswahrscheinlichkeit einer Fertigkeitsprobe auf (a, b) bei einem Fertigkeitswert $k \in \mathbb{N}_0$ herleiten. Hierbei setzen wir $a, b \in \{1, 2, \dots, 20\}$ voraus und verwenden die Ergebnismenge

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, \dots, 20\}\},$$

modellieren also die zwei unabhängigen Würfe mit dem W20 unter Beachtung der Reihenfolge durch Paare (x, y) , wobei x die Augenzahl des ersten und y die Augenzahl des zweiten Wurfs anzeigt. Offenbar gilt $|\Omega| = 20 \cdot 20 = 400$.

Wir überlegen uns nun, wie wir das betrachtete Ereignis $E = \text{„erfolgreiche Probe“}$ innerhalb dieser Modellierung beschreiben können. Der einfachste Fall ist der einer Probe mit Fertigkeitswert $k = 0$, den wir zum Warmwerden betrachten wollen. In diesem Fall muss für einen Erfolg der erste Wurf höchstens a und der zweite Wurf höchstens b zeigen. Das betreffende Ereignis ist

$$E = \{(x, y) \in \Omega \mid x \leq a \text{ und } y \leq b\},$$

und wir erhalten $|E| = ab$ und $P(E) = \frac{ab}{400}$.

Nun wenden wir uns dem allgemeinen Fall $k \geq 0$ zu. Eine Probe ist erfolgreich, falls wir im ersten Wurf höchstens k Punkte und im zweiten Wurf höchstens die verbleibenden Punkte verbrauchen. Demnach gehört ein Paar (x, y) genau dann zum Erfolgseignis E , wenn

$$\max\{x - a, 0\} + \max\{y - b, 0\} \leq k$$

gilt. Dies ist für unsere Berechnungen etwas unhandlich und daher formulieren wir geeignet um. Wenn

wir im ersten Wurf i Punkte mit $0 \leq i \leq k$ verbrauchen, so verbleiben für den zweiten Wurf noch $k - i$ Punkte. Ein Paar $(x, y) \in \Omega$ gehört also genau dann zu E , wenn $x \leq a$ und $y \leq b + k$ gilt (beim ersten Wurf wurden 0 Punkte verbraucht), oder wenn eine ganze Zahl i mit $1 \leq i \leq k$ existiert, so dass $x = a + i$ und $y \leq b + k - i$ gilt (im ersten Wurf wurden genau i Punkte verbraucht.). Das betrachtete Ereignis ist also

$$E = E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_k,$$

wobei $E_0 = \{(x, y) \in \Omega \mid x \leq a \text{ und } y \leq b + k\}$ und $E_i = \{(x, y) \in \Omega \mid x = a + i \text{ und } y \leq b + k - i\}$ für $i = 1, \dots, k$ sei. Man beachte, dass es sich hierbei um eine disjunkte Vereinigung handelt.

Als Beispiel betrachten wir eine Probe mit Fertigkeitswert $k = 3$ auf $(a, b) = (14, 12)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(x, y) \in \Omega \mid x \leq 14 \text{ und } y \leq 15\}, \\ E_1 &= \{(x, y) \in \Omega \mid x = 15 \text{ und } y \leq 14\}, \\ E_2 &= \{(x, y) \in \Omega \mid x = 16 \text{ und } y \leq 13\}, \\ E_3 &= \{(x, y) \in \Omega \mid x = 17 \text{ und } y \leq 12\}, \end{aligned}$$

und $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Wir erhalten aufgrund der Disjunktheit der Teilereignisse, dass

$$\begin{aligned} |E| &= |E_0| + |E_1| + |E_2| + |E_3| \\ &= 14 \cdot 15 + 14 + 13 + 12 = 249, \end{aligned}$$

und folglich $P(E) = \frac{249}{400}$. Unsere Überlegungen lassen sich gut veranschaulichen. Wir identifizieren jedes Element $(x, y) \in \Omega$ mit dem 1×1 -Kästchen im Koordinatensystem, dessen rechte obere Ecke der Punkt $P(x|y)$ ist. Die Ergebnismenge Ω ist dann eine quadratische Fläche aus $20 \cdot 20 = 400$ Kästchen und das Ereignis E lässt sich als Teilfläche davon darstellen. In Abb. 1 sind E_0 schraffiert und E_1, E_2, E_3 ungefüllt dargestellt.² Wir erkennen anhand der Veranschaulichung außerdem, dass sich der Rechenweg vereinfachen lässt. Wir können einfach den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $a + k = 17$ und $b + k = 15$ berechnen und den Flächeninhalt $1 + 2 + 3 = 6$ des doppelt schraffierten „Dreiecks“ davon subtrahieren; in der Tat gilt $17 \cdot 15 - 6 = 249$. Abbildungen dieser Art werden auch im weiteren Verlauf hilfreich sein.

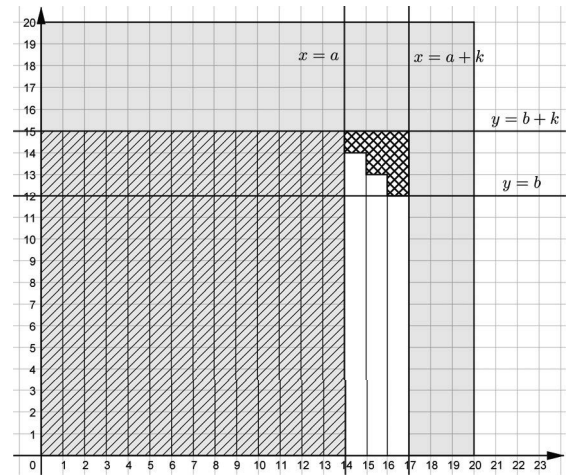


Abb. 1: E als Teilmenge von Ω im Koordinatensystem (E_0 schraffiert, E_1, E_2, E_3 ungefüllt).

Wir können auch im Allgemeinen nach dem im Beispiel illustrierten Ansatz vorgehen, dürfen beim Bestimmen der Mächtigkeit von E aber die Bedingung $(x, y) \in \Omega$, also $x, y \leq 20$, nicht vergessen. Im betrachteten Beispiel war diese automatisch erfüllt, da sowohl $a + k$ als auch $b + k$ nicht größer als 20 waren. Hätten wir eine Probe mit Fertigkeitswert $k = 10$ auf $(a, b) = (15, 12)$ betrachtet, so hätten wir bedenken müssen, dass z.B. $(x, y) = (13, 22)$ nicht zu E gehört. Es gilt zwar $x \leq a$ und $y \leq b + k$, aber wegen $y > 20$ gilt $(x, y) \notin \Omega$. Anschaulich handelt es sich um ein Kästchen, das nicht im betrachteten 20×20 -Quadrat liegt. Um den Überblick zu behalten, unterscheiden wir vier Fälle und beginnen mit dem einfachsten.

Fall 1: $a + k \leq 20$ und $b + k \leq 20$. In diesem Fall können wir analog zum oben betrachteten Beispiel vorgehen, weil es keine Paare (x, y) gibt, für die zwar $x = a + i$ und $y \leq b + k - i$ für ein $i \in \{0, \dots, k\}$ gilt, obwohl $(x, y) \notin \Omega$ ist. Anhand von Abb. 1 erkennen wir leicht, dass der Flächeninhalt des doppelt schraffierten „Dreiecks“ im Allgemeinen gleich $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ ist³, so dass wir

$$\begin{aligned} |E| &= (a + k)(b + k) - \frac{k(k+1)}{2} \\ &= ab + (a + b)k + k^2 - \frac{k(k+1)}{2} \\ &= ab + (a + b)k + \frac{k(k-1)}{2}, \end{aligned}$$

bzw.

$$P(E) = \frac{ab + (a + b)k - k(k-1)/2}{400}$$

erhalten. Auch ohne die Veranschaulichung in Abb. 1 lässt sich die Kardinalität der Menge E leicht elementar-kombinatorisch bestimmen. In unserem Fall besteht die Menge E_0 aus allen Paaren (x, y) mit $x \leq a$ und $y \leq b + k$, d.h. $x \in \{1, \dots, a\}$ und $y \in \{1, \dots, b + k\}$, und $|E_0| = |\{1, \dots, a\}| \cdot |\{1, \dots, b + k\}| = a \cdot (b + k)$. Weiter gilt für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$, dass E_i aus allen Paaren (x, y) mit $x = a + i$ und $y \leq b + k - i$ besteht, d.h. $x \in \{a + i\}$ und $y \in \{1, \dots, b + k - i\}$, und damit $|E_i| = |\{a + i\}| \cdot |\{1, \dots, b + k - i\}| = 1 \cdot (b + k - i)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |E| &= |E_0| + \sum_{i=1}^k |E_i| \\ &= a(b + k) + \sum_{i=1}^k (b + k - i) \\ &= a(b + k) + k(b + k) - \sum_{i=1}^k i \\ &= (a + k)(b + k) - \frac{k(k + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Fall 2: $a + k > 20$ und $b + k \leq 20$. In diesem Fall ragt das Rechteck mit den Seitenlängen $a + k$ und $b + k$ rechts aus dem Quadrat mit der Seitenlänge 20 heraus (siehe Abb. 2).

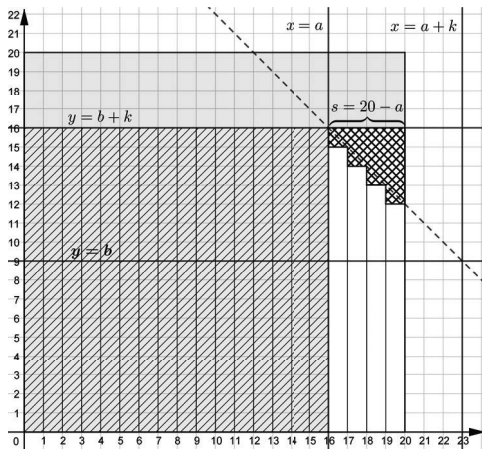


Abb. 2: Für $a = 16, k = 7$ gilt $a + k > 20$.

Die Mächtigkeit von E ergibt sich nun als Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $b + k$ und 20 vermindert um den Flächeninhalt des doppelt schraffierten „Dreiecks“. Dieser beträgt $1 + 2 + \dots + s = \frac{s(s+1)}{2}$ mit $s = 20 - a$ und wir erhalten

$$|E| = 20(b + k) - \frac{(20 - a)(21 - a)}{2}.$$

Auch hier können wir wieder elementar-kombinatorisch argumentieren. Während die Kardinalität von E_0 unverändert $a(b + k)$ ist, gilt es im

Vergleich zu obigem Argument lediglich zu beachten, dass wegen $a + k > 20$ gilt, dass $x = a + i$ nur für die $i \in \{1, \dots, k\}$ gelten kann, für die $a + i \leq 20$ ist. Letzteres ist äquivalent zu $i \leq 20 - a$. Für alle $i > 20 - a$ ist $E_i = \emptyset$. Definieren wir nun $s := 20 - a$, so folgt entsprechend unserer Rechnung im Fall 1, dass

$$\begin{aligned} |E| &= |E_0| + \sum_{i=1}^k |E_i| \\ &= a(b + k) + \sum_{i=1}^s |E_i| + \sum_{i=s+1}^k |\emptyset| \\ &= a(b + k) + \sum_{i=1}^s (b + k - i) \\ &= a(b + k) + s(b + k) - \sum_{i=1}^s i \\ &= 20(b + k) - \frac{s(s + 1)}{2} \\ &= 20(b + k) - \frac{(20 - a)(21 - a)}{2}. \end{aligned}$$

Fall 3: $a + k \leq 20$ und $b + k > 20$. In diesem Fall ragt das Rechteck mit den Seitenlängen $a + k$ und $b + k$ oben aus dem Quadrat mit der Seitenlänge 20 heraus, und wir erhalten analog zum zweiten Fall (auch die elementar-kombinatorischen Überlegungen verlaufen analog zum zweiten Fall).

$$|E| = 20(a + k) - \frac{(20 - b)(21 - b)}{2}.$$

Fall 4: $a + k > 20$ und $b + k > 20$. In diesem Fall ragt das Rechteck mit den Seitenlängen $a + k$ und $b + k$ sowohl rechts also auch oben aus dem Quadrat mit der Seitenlänge 20 heraus (siehe Abb. 3).

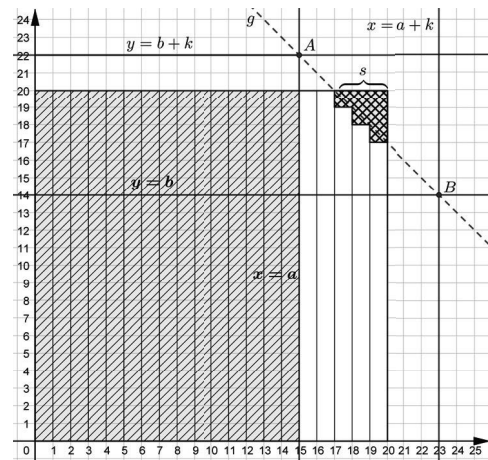


Abb. 3: $a + k > 20$ und $b + k > 20$

Es gilt offenbar $|E| = 400 - \frac{s(s+1)}{2}$. Um s zu bestimmen, müssen wir herausfinden, an welcher Stelle der Graph der linearen Funktion g durch die Punkte A und B die Gerade mit der Gleichung $y = 20$ schneidet (vgl. Abb. 3). Der Funktionsterm von g besitzt offenbar die Form $g(x) = -x + m$. Um m zu bestimmen, setzen wir die Koordinaten des Punktes $A(a|b+k)$ in die Funktionsgleichung ein und erhalten $b+k = g(a) = -a + m$ bzw. $m = a + b + k$. Also gilt $g(x) = -x + a + b + k$. Nun erhalten wir

$$g(x) = 20 \Leftrightarrow x = a + b + k - 20,$$

und daraus folgt

$$s = 20 - (a + b + k - 20) = 40 - (a + b + k).$$

Diese Rechnung ist natürlich nur sinnvoll, falls $40 - (a + b + k) \geq 0$ ist. Tatsächlich gilt $P(E) < 1$ genau dann, wenn $40 - (a + b + k) > 0$ ist. Falls nämlich $40 - (a + b + k) \leq 0$ ist, so gelingt die Fertigungsprobe immer. Um dies einzusehen, stellen wir uns vor, dass wir im ersten Wurf so schlecht wie möglich, nämlich eine 20, würfeln. Wenn wir mit diesem Wurf $i \geq 0$ Punkte verbraucht haben, gilt $20 = a + i$, und damit die Probe gelingt, dürfen wir im zweiten Wurf höchstens $k - i$ Punkte verbrauchen. Bezeichnen wir das Ergebnis des zweiten Wurfs mit y , so muss zum Gelingen der Probe $y \leq b + k - i$ gelten. Wegen $y \leq 20$ reicht es zu zeigen, dass $20 \leq b + k - i$ ist. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} 20 &\leq b + k - i \\ \Leftrightarrow 20 - (b + k - i) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{20 - (a + i)}_{=0} + 20 - (b + k - i) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 40 - (a + b + k) &\leq 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$|E| = 400 - \frac{s(s+1)}{2},$$

wobei $s = \max\{40 - (a + b + k), 0\}$ sei.

Zusammenfassung der vier Fälle Wir haben bisher herausgearbeitet, dass $|E| = h(a, b, k)$ gilt, wobei $h(a, b, k)$ gegeben ist durch:

$$\begin{array}{ll} ab + (a+b)k + \frac{k(k-1)}{2} & \text{für } k \leq \min\{20-a, 20-b\}, \\ 20(b+k) - \frac{(20-a)(21-a)}{2} & \text{für } 20-a < k \leq 20-b, \\ 20(a+k) - \frac{(20-b)(21-b)}{2} & \text{für } 20-b < k \leq 20-a, \\ 400 - \frac{s(s+1)}{2} & \text{für } k > \max\{20-a, 20-b\}, \end{array}$$

wobei $s = \max\{40 - (a + b + k), 0\}$ sei. Wir wollen uns klarmachen, dass dies folgendermaßen zusammengefasst werden kann:

$$h(a, b, k) = ab + am_1 + bm_2 + m_1m_2 - \frac{s(s+1)}{2}, \quad (1)$$

wobei $m_1 = \min\{k, 20-b\}$, $m_2 = \min\{k, 20-a\}$, sowie $s = \max\{40 - (a + b + k), 0\}$, falls $k > \max\{20-a, 20-b\}$, und $s = \min\{k, 20-a, 20-b\}$ andernfalls.

Im *ersten Fall* ($k \leq \min\{20-a, 20-b\}$) gilt $m_1 = m_2 = s = k$, also

$$\begin{aligned} &ab + am_1 + bm_2 + m_1m_2 - \frac{s(s+1)}{2} \\ &= ab + (a+b)k + k^2 - \frac{k(k+1)}{2} \\ &= h(a, b, k). \end{aligned}$$

Im *zweiten Fall* ($20-a < k \leq 20-b$) gilt $m_1 = k$ und $m_2 = s = 20-a$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} &ab + am_1 + bm_2 + m_1m_2 - \frac{s(s+1)}{2} \\ &= ab + ak + b(20-a) \\ &\quad + k(20-a) - \frac{(20-a)(21-a)}{2} \\ &= h(a, b, k). \end{aligned}$$

Der *dritte Fall* ist analog zum zweiten Fall und im *vierten Fall* ($k > \max\{20-a, 20-b\}$) gilt $m_1 = 20-a$, $m_2 = 20-b$ und $s = \max\{40 - (a + b + k), 0\}$. Einsetzen liefert auch hier das gewünschte Ergebnis.

Ob Formel (1) wirklich einen großen Zugewinn liefert, sei dahingestellt. Auf jeden Fall eignen sich sowohl diese Formel als auch die Darstellung von $h(a, b, k)$ mithilfe einer Fallunterscheidung gut zum Bestimmen von Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Computers, aber weniger gut für Rechnungen von Hand. Ein Excel-Arbeitsblatt, in dem man a, b angeben kann und $h(a, b, k)$ bzw. $p(a, b, k) := h(a, b, k)/400$ ausgegeben wird, ist nun leicht erstellt (siehe Abb. 4). Ebenfalls mit Excel wurde Abb. 5 erstellt, in der $p(11, 13, k)$ gegen k aufgetragen ist.

	A	B	C	D	E	F
1	a	11				
2	b	13				
3						
4						
5						
6	k	m_1	m_2	s	h(a,b,k)	p(a,b,k)
7	0	0	0	0	143	0,3575
8	1	1	1	1	167	0,4175
9	2	2	2	2	192	0,48
10	3	3	3	3	218	0,545
11	4	4	4	4	245	0,6125
12	5	5	5	5	273	0,6825
13	6	6	6	6	302	0,755
14	7	7	7	7	332	0,83
15	8	7	8	7	352	0,88
16	9	7	9	7	372	0,93
17	10	7	9	6	379	0,9475
18	11	7	9	5	385	0,9625
19	12	7	9	4	390	0,975
20	13	7	9	3	394	0,985
21	14	7	9	2	397	0,9925
22	15	7	9	1	399	0,9975
23	16	7	9	0	400	1
24	17	7	9	0	400	1
25	18	7	9	0	400	1
26						

Abb. 4: Excel-Arbeitsblatt zur Bestimmung von $h(a,b,k)$ bzw. $p(a,b,k)$

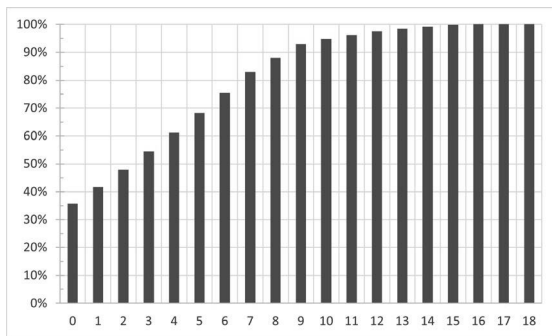


Abb. 5: Erfolgswahrscheinlichkeiten einer Probe auf $(a,b) = (11,13)$ mit einem Fertigkeitswert von $k = 0, 1, \dots, 18$ Punkten.

3 Der dreidimensionale Fall

Nun wollen wir uns der ursprünglich gestellten Frage widmen, also der nach der Erfolgswahrscheinlichkeit einer Fertigkeitsprobe mit drei Würfeln auf (a,b,c) und einem Fertigkeitswert $k \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen hierbei $a,b,c \in \{1, \dots, 20\}$ voraus. Als Ergebnismenge verwenden wir analog zum zweidimensionalen Fall

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \{1, \dots, 20\}\} \\ &= \{1, \dots, 20\}^3,\end{aligned}$$

modellieren das dreimalige Würfeln eines W20 unter Beachtung der Reihenfolge also durch Tripel (x,y,z) , wobei x die Augenzahl des ersten, y die des zweiten und z die des dritten Wurfes darstellt. Offenbar gilt nun $|\Omega| = 20^3 = 8000$. Von nun an bezeichnen wir das Ereignis, mit drei Würfeln eine erfolgreiche Probe abzulegen, mit E . Wie im zweidimensionalen Fall

ist der Fall einer Probe mit $k = 0$ Fertigkeitspunkten der einfachste, den wir vorab kurz klären wollen. In diesem Fall gilt

$$E = \{(x,y,z) \mid x \leq a, y \leq b, z \leq c\},$$

also $|E| = abc$ und $P(E) = \frac{abc}{8000}$.

Nun wenden wir uns dem allgemeinen Fall $k \geq 0$ zu. Wir können Ω und E nun in einem dreidimensionalen Koordinatensystem veranschaulichen. Hierbei hat Ω die Gestalt eines Würfels, und im Falle von $k = 0$ Fertigkeitspunkten besitzt E die Form eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c . Für $k > 0$ ist die Gestalt von E etwas komplizierter, aber grundsätzlich ein dreidimensionales Analogon zum im zweidimensionalen Fall betrachteten Rechteck, „von dem ein Dreieck abgeschnitten wurde.“ Die in Abb. 6 gezeigte schöne Visualisierung stammt von der Webseite von Müller-Kalthoff (2017), der ein praktisches Tool zur Berechnung von Erfolgswahrscheinlichkeiten bei Fertigkeitsproben zur Verfügung stellt.⁴ Für dieses Tool wird übrigens ein Brute-Force-Ansatz verwendet, der einfach für alle Tripel $(x,y,z) \in \Omega$ prüft, ob die Probe bestanden ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\max\{x-a, 0\} + \max\{y-b, 0\} + \max\{z-c, 0\} \leq k$ ist (wenn man glückliche Erfolge und Patzer außen vor lässt).

Ein Quelltext zur Bestimmung von $|E|$ mit diesem Ansatz ist leicht erstellt und auf Nachfrage vom zweiten Autor zu erhalten. Will man bei einem solchen Ansatz auch glückliche Erfolge und Patzer berücksichtigen, so kann man einfach zusätzlich abfragen, ob $x+y = 40$ bzw. $x+z = 40$ bzw. $y+z = 40$ und ob $x+y = 2$ bzw. $x+z = 2$ bzw. $y+z = 2$ gilt. Ein entsprechender Quelltext ist ebenfalls vom zweiten Autor zu erhalten.

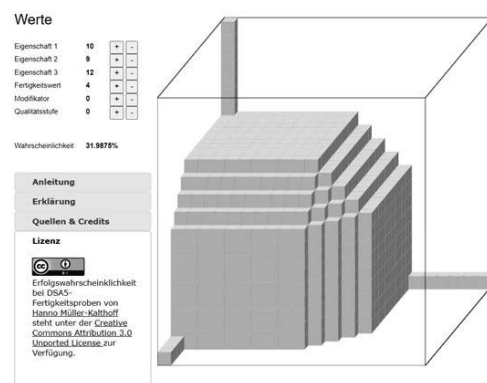


Abb. 6: Visualisierung von Ω und E auf der Webseite von Müller-Kalthoff (2017)

Wir könnten nun ähnlich wie im zweidimensionalen Fall vorgehen, und das Volumen des grauen Gebildes bestimmen, um die Mächtigkeit von E zu berechnen. Dies würde allerdings etwas komplizierter werden, da die grundsätzliche Form von E davon abhängig ist, welche der Werte $a+k, b+k, c+k$ größer als 20 sind. Wir gehen daher anders vor und nutzen unsere Ergebnisse aus dem zweidimensionalen Fall. Um Bezeichnungskonflikte zu vermeiden, schreiben wir von nun an $E_2(a, b, k)$ für das oben betrachtete Ereignis einer erfolgreichen Probe mit zwei Würfeln auf (a, b) bei einem Fertigkeitswert von k .

Stehen bei einer Probe mit drei Würfeln auf (a, b, c) insgesamt k Punkte zur Verfügung, und werden im ersten Wurf keine Punkte verbraucht, so stellen die letzten beiden Würfe eine Probe auf (b, c) mit einem Fertigkeitswert von k dar. Wir bezeichnen dieses Teilereignis mit E_0 und kennen seine Mächtigkeit, denn es gilt

$$E_0 = \{(x, y, z) \in \Omega \mid x \leq a, (y, z) \in E_2(b, c, k)\},$$

also $|E_0| = a \cdot |E_2(b, c, k)| = a \cdot h(b, c, k)$. Werden im ersten Wurf i Punkte verbraucht, so stellen die letzten beiden Würfe eine Probe auf (b, c) mit $k-i$ Fertigkeitspunkten dar. Für $i \geq 1$ sei daher

$$E_i = \{(x, y, z) \in \Omega \mid x = a+i, (y, z) \in E_2(b, c, k-i)\}.$$

Es gilt $|E_i| = |E_2(b, c, k-i)| = h(b, c, k-i)$ für $1 \leq i \leq k$. Da wir im ersten Wurf höchstens k aber auch nicht mehr als $20-a$ Punkte verbrauchen können, gilt

$$E = E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_n,$$

wobei $n = \max\{k, 20-a\}$ sei. Da es sich um eine disjunkte Vereinigung handelt, erhalten wir

$$\begin{aligned} |E| &= |E_0| + |E_1| + \dots + |E_n| \\ &= a \cdot h(b, c, k) + \sum_{i=1}^n h(b, c, k-i), \end{aligned}$$

bzw.

$$P(E) = \frac{a \cdot h(b, c, k) + \sum_{i=1}^n h(b, c, k-i)}{8000}.$$

Erneut handelt es sich um eine Formel, die für Berechnungen per Hand weniger geeignet ist, aber gut mit dem Computer verarbeitet werden kann. Die folgende Abb. 7 wurde mithilfe von SageMath⁵ erzeugt. Der Quelltext findet sich im Anhang.

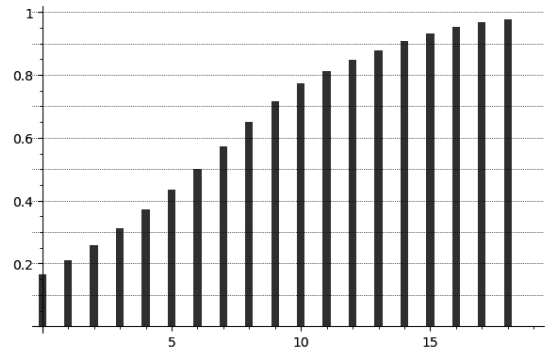


Abb. 7: Erfolgswahrscheinlichkeiten einer Probe auf $(a, b, c) = (10, 11, 12)$ mit einem Fertigkeitswert von $k = 0, 1, \dots, 18$ Punkten.

Wir wollen noch anhand eines Beispiels verdeutlichen, wie gering der Einfluss der Regelfeinheiten „glücklicher Erfolg“ (mindestens zwei Einsen sind automatischer Erfolg) und „Patzer“ (mindestens zwei Zwanzigen sind automatischer Misserfolg) auf die Erfolgswahrscheinlichkeit ist. Dazu betrachten wir eine Probe auf $(11, 12, 13)$ bei einem Fertigkeitswert von $k = 5$. Werden mindestens zwei Zwanzigen geworfen, so wäre die Probe ohnehin misslungen; Patzer haben in diesem Beispiel also keinen Einfluss. Nun betrachten wir noch glückliche Erfolge, zählen also wie viele Würfel-Ergebnisse mit mindestens zwei Einsen es gibt, die normalerweise misslungen wären. Dies sind die folgenden Ergebnisse: $(1, 1, 19)$, $(1, 1, 20)$, $(1, 18, 1)$, $(1, 19, 1)$, $(1, 20, 1)$, $(1, 1, 17)$, $(1, 1, 18)$, $(1, 1, 19)$, $(1, 1, 20)$.

Nach unserer Formel, die diese neun Ergebnisse nicht mitzählt, ergibt sich $|E| = 4241$, also $P(E) = 4241/8000 = 53,0125\%$. Der korrekte Wert unter Einbeziehung der glücklichen Erfolge wäre $P(E) = 4250/8000 = 53,125\%$. Der Einfluss von glücklichen Erfolgen und Patzern ist also in der Tat sehr gering.

4 Alles auf eine Karte?

Durch das Bestehen von Abenteuern verdienen Heldinnen Abenteuerpunkte. Diese können sie investieren, um Eigenschaftswerte zu erhöhen: Die Erhöhung eines bestimmten Eigenschaftswertes um 1 kostet eine bestimmte Anzahl an Abenteuerpunkten. Da diese nicht im Überfluss vorhanden sind, können die Spielerinnen nicht alle Eigenschaftswerte erhöhen, sondern stehen häufig vor der Entscheidung, welchen Wert sie zu einem bestimmten Zeitpunkt zur Erhöhung auswählen. Im Laufe der Zeit stellt sich die Frage, ob sie alles auf eine Karte set-

zen, d.h. zunächst eine der acht Eigenschaften besonders gut ausbilden sollten, um die Chancen einer erfolgreichen Probe zu erhöhen. Oder sollten sie lieber ausgeglichene Eigenschaftswerte anstreben? Wir wollen diese Fragestellung zunächst im zweidimensionalen Fall analysieren.

Wir wollen klären, wann bei gegebener Eigenschaftssumme $s = a + b$ bei Proben auf (a, b) die Wahrscheinlichkeit für eine erfolgreiche Probe höher ist: Wenn die Eigenschaftswerte gestreut sind (etwa $a = 7$ und $b = 15$, $s = 7 + 15 = 22$) oder wenn die Eigenschaftswerte gleichmäßig verteilt sind (also $a = b = s/2 = 11$, $s = 22$). Dabei setzen wir voraus, dass stets die gleiche Zahl $k \in \{0, 1, \dots, 18\}$ an Fertigungspunkten zur Verfügung steht.

Die Betrachtung konkreter Beispiele (und vermutlich auch das „stochastische Bauchgefühl“) legen nahe, dass eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Eigenschaftswerte optimal ist. Wir wollen also zeigen, dass bei vorgegebenem $s \in \mathbb{N}$ die Erfolgswahrscheinlichkeit für eine Probe auf $(\lceil s/2 \rceil, \lfloor s/2 \rfloor)$ stets mindestens so groß ist wie die für eine Probe auf (a, b) mit $a + b = s$. Hierbei sei $\lfloor s/2 \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner gleich $s/2$ ist, und $\lceil s/2 \rceil$ sei die kleinste ganze Zahl, die größer gleich $s/2$ ist. Falls s gerade ist, gilt $\lfloor s/2 \rfloor = \lceil s/2 \rceil = s/2$, und falls s ungerade ist, gilt $\lfloor s/2 \rfloor = \frac{s-1}{2}$ und $\lceil s/2 \rceil = \frac{s+1}{2}$. Wir betrachten ab jetzt nur noch $a, b \in \{1, 2, \dots, 20\}$ mit $a + b = s$. Daher gilt stets $b = s - a$, und wir notieren das Ereignis einer erfolgreichen Probe auf $(a, b) = (a, s - a)$ mit k Fertigungspunkten wie oben als $E_2(a, b, k) = E_2(a, s - a, k)$.

Wir wissen bereits, wie sich die Mächtigkeit von $E_2(a, s - a, k)$ anschaulich bestimmen lässt. Es handelt sich um den Flächeninhalt der Schnittfläche des Quadrats Q , das von den Koordinatenachsen und den Geraden mit den Gleichungen $x = 20$ und $y = 20$ begrenzt wird, und des Vielecks $V_k(a)$, das von den Koordinatenachsen und den Geraden mit den Gleichungen $x = a + k$, $y = s - a + k$ und $g(x) = -x + s + k$ (vgl. $g(x) = -x + b + k$ in Fall 4 in Abschnitt 2) begrenzt wird.⁶ (vgl. Abb. 8) Wir haben also zu zeigen, dass

$$F(V_k(\lceil s/2 \rceil) \cap Q) \geq F(V_k(a) \cap Q)$$

für alle $a \in \{1, \dots, 20\}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, wobei $F(\cdot)$ den Flächeninhalt bezeichne.

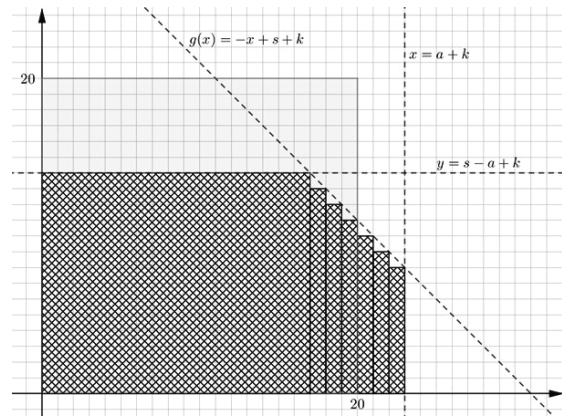


Abb. 8: Q ist grau und $V_k(a)$ ist doppelt schraffiert dargestellt (hier $s = 25, a = 17, k = 6$).

Dazu zeigen wir zunächst, dass $F(V_k(\lceil s/2 \rceil)) \geq F(V_k(a))$ stets erfüllt ist. Wir haben uns bereits oben klargemacht, dass $V_k(a)$ ein Rechteck mit den Kantenlängen $a + k$ bzw. $s - a + k$ ist, von dem ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $\frac{k(k+1)}{2}$ entfernt wurde. Daher reicht es zu zeigen, dass das Rechteck mit den Kantenlängen $\lceil s/2 \rceil + k$ und $\lfloor s/2 \rfloor + k$ unter allen Rechtecken mit den Kantenlängen $a + k$ und $s - a + k$ den maximalen Flächeninhalt besitzt.⁷ Wegen

$$\begin{aligned} (a+k)(s-a+k) &\leq (a'+k)(s-a'+k) \\ \Leftrightarrow a(s-a) + sk + k^2 &\leq a'(s-a') + sk + k^2 \\ \Leftrightarrow a(s-a) &\leq a'(s-a') \end{aligned}$$

reicht es zu zeigen, dass $\lceil s/2 \rceil(s - \lceil s/2 \rceil) \geq a(s - a)$ für alle $a \in \{1, \dots, 20\}$ gilt. Dazu betrachten wir die reelle Funktion f mit $f(x) = x(s - x)$, deren Graph eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = s$ ist. Daher nimmt f sein absolutes Maximum an der Scheitelstelle $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{s}{2}$ an. Für gerades s erhalten wir damit sofort $f(\lceil s/2 \rceil) = f(s/2) \geq f(a)$ für alle a . Ist s ungerade, so folgt aufgrund der Symmetrie der Parabel

$$f(\lceil s/2 \rceil) = f\left(\frac{s+1}{2}\right) = f\left(\frac{s-1}{2}\right) \geq f(a)$$

für alle $a \in \{1, \dots, 20\}$, weil zwischen $\frac{s-1}{2}$ und $\frac{s+1}{2}$ keine natürliche Zahl liegt.

Nun können wir o.B.d.A. voraussetzen, dass $a \geq \lceil s/2 \rceil$ ist, da wir sonst die folgende Argumentation auf $s - a$ anstelle von a anwenden könnten. Falls $V_k(\lceil s/2 \rceil) \subseteq Q$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} F(V_k(\lceil s/2 \rceil) \cap Q) &= F(V_k(\lceil s/2 \rceil)) \\ &\geq F(V_k(a)) \\ &\geq F(V_k(a) \cap Q), \end{aligned}$$

und wir sind fertig.

Falls $V_k(\lceil s/2 \rceil) \not\subseteq Q$, so ragt $V_k(\lceil s/2 \rceil)$ rechts aus Q heraus, weil es mindestens so breit wie hoch ist, denn $\lceil s/2 \rceil + k \geq \lfloor s/2 \rfloor + k = s - \lceil s/2 \rceil + k$. Wegen $a \geq \lceil s/2 \rceil$ ragt dann auch $V_k(a)$ rechts aus Q heraus (vgl. Abb. 9).

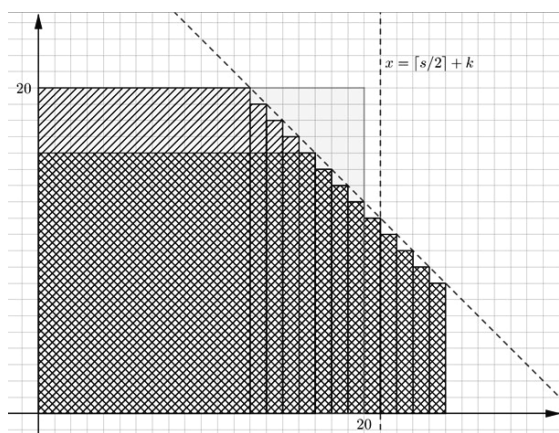


Abb. 9: $V_k(\lceil s/2 \rceil)$ ist einfach und $V_k(a)$ ist doppelt schraffiert (hier $s = 25$, $\lceil s/2 \rceil = 13$, $a = 17$, $k = 8$).

Wegen $s - a \leq s - \lceil s/2 \rceil \leq s - \lfloor s/2 \rfloor$ ist $V_k(a)$ weniger hoch als $V_k(\lceil s/2 \rceil)$. Beachten wir zudem, dass die rechte obere Begrenzung der beiden Vielecke durch $g(x) = -x + s + k$ nicht von deren Breite abhängig ist, so erhalten wir, dass in diesem Fall

$$V_k(a) \cap Q \subseteq V_k(\lceil s/2 \rceil) \cap Q$$

gilt (vgl. Abb. 9). Damit folgt direkt $F(V_k(a) \cap Q) \leq F(V_k(\lceil s/2 \rceil) \cap Q)$.

Damit ist der zweidimensionale Fall abgehandelt. Im dreidimensionalen Fall führt eine analoge Überlegung (in der die Rolle der Rechtecke von Quadern übernommen wird) zum selben Ergebnis, nämlich, dass bei gegebener Eigenschaftssumme $s = a + b + c$ die Erfolgswahrscheinlichkeit für eine Probe mit k Punkten auf (a, b, c) bei möglichst gleichmäßiger Verteilung von s auf die drei Werte⁸ maximal ist.

5 Weitere Fragestellungen

Eine Variation der untersuchten Fragestellung, ist folgende: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Probe, wenn „gute“ Würfe die „schlechten“ ausgleichen können? Dies kann mit oder ohne einen Fertigkeitswert $k \in \{0, \dots, 18\}$ untersucht werden. Natürlich könnten auch negative Fertigkeitswerte k zugelassen werden, die dann für eine erfolgreiche Probe durch „gute“ Würfe ausgeglichen werden müssen. Tatsächlich gibt es nach dem Regelwerk der 3. Edition des Schwarzen Auges auch

negative Fertigkeitswerte, in der aktuellen 5. Edition ist das nicht mehr der Fall. Eine ebenfalls interessante weiterführende Fragestellung bezieht sich auf eine weitere Regeländerung der 5. Edition. Diese hat mit sogenannten erschwerten bzw. erleichterten Proben zu tun. Natürlich sind nicht alle Aktionen, die man auf Grundlage einer Fertigkeit ausführen möchte, vergleichbar schwierig. Es ist z.B. einfacher, einen Hügel zu erklettern als eine Steilwand. Im ersten Fall wäre eine Kletternprobe erleichtert, im zweiten Fall erschwert. Nach altem Regelsystem bedeutete die Erschwerung einer Probe um ℓ Punkte, dass man bei einem Fertigkeitswert von k nur noch $k - \ell$ (ggf. negativ) anstelle von k Punkten zur Verfügung hatte. Nach den aktuellen Regeln der 5. Edition bedeutet eine Erschwerung um ℓ Punkte, dass man anstatt die Probe auf seine Eigenschaftswerte a, b, c abzulegen, eine Probe auf $(a - \ell, b - \ell, c - \ell)$ ablegen muss. Erleichterte Proben gehen analog mit einer Vergrößerung des Fertigkeitswert bzw. mit einer Erhöhung der Eigenschaftswerte für die betreffende Probe einher. In diesem Zusammenhang sind weitere interessante stochastische Fragestellungen denkbar, etwa wie sich diese Regeländerung im Detail auf die Erfolgswahrscheinlichkeiten auswirkt⁹.

Da die hier vorgestellte Herleitung einer exakten Lösung der Fragestellung (zumindest für die Schule) doch recht aufwändig ist, wollen wir abschließend noch aufzeigen, wie man in dieser Modellierung auf verständliche Weise die Güte einfacher Näherungen vergleichen kann. Zur Einfachheit gehen wir dazu noch einmal auf den zweidimensionalen Fall zurück, betrachten also beispielsweise eine Probe auf $(11, 13)$ mit Fertigkeitswert $k = 1$. Man könnte die Schülerinnen und Schüler nun zu folgendem Streitgespräch Stellung nehmen lassen: Lisa sagt: „Da wir den einen Fertigkeitspunkt beim ersten oder zweiten Wurf verbrauchen dürfen ist $12 \cdot 14/400$ ein guter Näherungswert für die Erfolgswahrscheinlichkeit der Probe.“ Max entgegnet: „Nein! Da wir **insgesamt nur einen** Fertigkeitspunkt verbrauchen dürfen, wären $12 \cdot 13/400$ oder $11 \cdot 14/400$ bessere Näherungswerte für die Erfolgswahrscheinlichkeit.“ Es lässt sich anhand einer Zeichnung derselben Art wie Abb. 1 auch ohne Rechnungen gut verstehen, dass die von Lisa vorgeschlagene Näherung die bessere ist. Bei dieser verwenden wir nämlich das ganze $(a + k) \times (b + k)$ -Rechteck anstelle von E , welches ja durch „Abschneiden“ der rechten oberen Ecke dieses Rechtecks entsteht. Im hier betrachteten Beispiel ($k = 1$) wird nur ein einziges Kästchen von diesem Rechteck abgeschnitten. Verwendet man hingegen

eine der von Max vorgeschlagenen Näherungen, so reduziert man das Rechteck mit der abgeschnittenen Ecke um eine ganze Zeile bzw. Spalte. Die Überlegung lässt sich gut auf den dreidimensionalen Fall übertragen, so dass z.B. $12 \cdot 13 \cdot 14/8000$ eine bessere Näherung für eine Probe mit $k = 1$ auf $(11, 12, 13)$ ist als etwa $12 \cdot 12 \cdot 13/8000$. Weitere Fragestellungen dieser Art bezüglich Näherungen und Schätzungen von Wahrscheinlichkeiten bieten sich an, wenn der Komplexitätsgrad der exakten Herleitung für die Lerngruppe zu hoch erscheint.

6 Anhang

Es folgt ein Quelltext zur Bestimmung von Erfolgswahrscheinlichkeiten und zur Erzeugung von Grafiken wie in Abb. 7.

```
In [1]: # h(a,b,k)=|E_2(a,b,k)| definieren
def h(a,b,k):
    m1=min(k,20-b)
    m2=min(k,20-a)
    if k>max(20-a,20-b):
        s=max(40-(a+b+k),0)
    else:
        s=min(k,20-a,20-b)
    return a*b+a*m1+b*m2+m1*m2-s*(s+1)/2

# H(a,b,c,k) gibt die Mächtigkeit des Ereignisses
# "erfolgreiche Probe" bei drei Würfeln auf (a,b,c)
# bei k Fertigkeitpunkten an
def H(a,b,c,k):
    n=min(k,20-a)
    return a*h(b,c,k)+sum(h(b,c,k-i) for i in range(1,n+1))

# P(a,b,c,k) gibt die entsprechende Wahrscheinlichkeit an
def P(a,b,c,k):
    return H(a,b,c,k)/8000

In [2]: # Beispiel: Erfolgswahrscheinlichkeit einer Probe auf
# (12,14,9) bei k=3 Fertigkeitpunkten

P(12,14,9,3)

Out[2]: 353/1000

In [4]: # Befehl zum Erzeugen des Säulendiagramms aus Abb. 7

bar_chart([P(10,11,12,k) for k in range(0,19)],width=0.3,
           ymin=0,ymax=1,gridlines=[[1],[0,0.1,0.2,...,1]])
```

Abb. 10: Bestimmung der Erfolgswahrscheinlichkeit einer Probe auf (a, b, c) mit k Fertigkeitpunkten

Weitere SageMath-Quelltexte, etwa zur Brute-Force-Bestimmung von $|E|$ im dreidimensionalen Fall (mit und ohne Berücksichtigung von glücklichen Erfolgen und Patzern) und zur Erstellung von Grafiken wie in Abb. 6, sind auf Nachfrage vom zweiten Autor zu erhalten.

Dank

Wir danken dem Universitätsgutachter für konstruktive Kritik und hilfreiche Verbesserungsvorschläge. Der zweite Autor dankt seinen treuen Gefährten Stefan Tavares Bollow, Karsten Schmedt und Alexander Schmitz für unzählige gemeinsame Stunden in Aventurien.

Anmerkungen

¹Zur besseren Lesbarkeit verwenden wir ausschließlich weibliche Formen, meinen aber stets alle Geschlechter.

²Das Ereignis aus dem oben betrachteten einfachsten Fall $k = 0$ besitzt in dieser Visualisierung die Gestalt eines Rechtecks mit den Kantenlängen a und b .

³Diese Identität ist auch als Gauß'sche Summenformel bekannt.

⁴Die aus dem Gebilde herausragenden, längs der Koordinatenachsen verlaufenden „Balken“ stellen Ergebnisse der Form $(x, 1, 1)$, $(1, y, 1)$ und $(1, 1, z)$ dar. Durch diese wird die oben erläuterte Regelfinheit des „glücklichen Erfolgs“ berücksichtigt, die wir außen vor lassen.

⁵SageMath (<https://www.sagemath.org>) ist eine auf der Programmiersprache Python (<https://www.python.org>) basierende, sehr gute und kostenfreie Alternative zu gängigen Programmen wie Maple, Mathematica, etc.

⁶Genauer müsste man sagen, dass das Vieleck von den genannten Geraden und von einem treppenförmigen Streckenzug, der durch die Gerade g eindeutig bestimmt ist, begrenzt wird.

⁷Mann könnte dies als bekannt voraussetzen, denn das Quadrat maximiert unter allen Rechtecken mit gegebenem Umfang den Flächeninhalt. Wir wollen dies hier der Vollständigkeit halber aber noch einmal zeigen.

⁸Falls $s \equiv 0 \pmod{3}$, so wähle $a = b = c = s/3$. Falls $s \equiv 1 \pmod{3}$, so wähle $a = \lfloor s/3 \rfloor + 1$ und $b = c = \lfloor s/3 \rfloor$. Falls $s \equiv 2 \pmod{3}$, so wähle $a = b = \lfloor s/3 \rfloor + 1$ und $c = \lfloor s/3 \rfloor$.

⁹Offenbar bewirkt eine Erschwerung um ℓ Punkte nach neuem System im Allgemeinen eine stärkere Reduzierung der Erfolgswahrscheinlichkeit als nach altem System.

Literatur

- Christiansen, H. (2013): Der stochastische Albtraum (DSA)? Teil II. Die 3W20-Probe. <https://www.teilzeithelden.de/2013/02/23/der-stochastische-albtraum-dsa-teil-ii-die-3w20-probe/>.
- Müller-Kalthoff, H. (2017): Erfolgswahrscheinlichkeit bei DSA5-Fertigkeitsproben. <http://dsa5.mueller-kalthoff.com/>.
- Spohr, A.; Ullrich, J. (2018): Das Schwarze Auge, Regelwerk. 3. überarbeitete Auflage. Ulisses Spiele GmbH, Waldems

Anschrift der Verfasser

Prof. Dr. Joscha Prochno
Fakultät für Informatik und Mathematik
Universität Passau
Dr.-Hans-Kapfinger-Straße 30, 94032 Passau
joscha.prochno@uni-passau.de

Dr. Michael Schmitz
Abteilung für Mathematik und ihre Didaktik
Europa-Universität Flensburg
Auf dem Campus 1, 24943 Flensburg
michael.schmitz@uni-flensburg.de